Décomposition de Bruhat

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 105 : Groupe de permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
- Système d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe T_1, T_2 triangulaires supérieures et un unique $\sigma \in S_n$ tel que $A = T_1 P_\sigma T_2$.*

Preuve:

Existence de la décomposition de Bruhat

Notons (E_{ij}) la base canonique, $\mathcal{T}_S$ l'ensemble des matrices triangulaire supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $i < j$ dans $[\![1, n]\!], \lambda \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ on définit :
- $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \in \mathcal{T}_S$
- $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii} \in \mathcal{T}_S$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
Soit $i_1 = \max\{k \in [\![1, n]\!] \,|\, a_{k,i} \neq 0\}$ (existe car $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

(i) $\forall k < i_1$, on multiplie à gauche par

$$T_{k,i_1}\left(-\frac{a_{k,1}}{a_{i_1,1}}\right) \quad \left(L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}\right) \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ a_{i_1,1} & (*) & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

(ii) On multiplie à gauche par

$$D_{i_1}\left(\frac{1}{a_{i_1,1}}\right) \quad \left(L_{i_1} \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} L_{i_1}\right) \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ 1 & (*) & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

(iii) $\forall k \in [\![2, n]\!]$, on multiplie à droite par

$$T_{i,k}(-a_{i_1,k}) \quad (C_k \leftarrow C_k - a_{i_1,k} C_1) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

On itère cet algorithme aux autres colonnes et on construit alors une suite $(i_1, \dots, i_n)$ avec $j \mapsto i_j$ injective de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ donc bijective.
Soit $\sigma \in S_n$ la permutation telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \sigma(k) = i_k$ et on lui associe la matrice de permutation P_σ. On a donc par construction $P_\sigma = T_1 A T_2$ d'où l'existence.

Unicité de la décomposition

Soit $A = T_1 P_\sigma T_2 = T_1' P_\tau T_2'$ avec σ, τ deux permutations de S_n et $T_1, T_2, T_1', T_2' \in \mathcal{T}_S$.
On a

$$P_\tau^{-1} \underbrace{(T_1')T_1}_{:=T} P_\sigma = \underbrace{T_2' T_2^{-1}}_{:=\widetilde{T}}$$

Par l'absurde si $\sigma \neq \tau$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) < \tau(i)$,

La $\sigma(i)$-ème colonne de T est alors $\begin{pmatrix} (*) \\ T_{\sigma(i),\sigma(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_{\tau(i),\sigma(i)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $0 \neq \widetilde{T}_{ii} = T_{\tau(i),\sigma(i)} = 0$.

Absurde, donc $\sigma = \tau$.

$\square$

Application. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $d = (F_0, \dots, F_n)$ un drapeau de $\mathbb{K}^n$.*
Alors $A \cdot d := (A(F_0), \dots, A(F_n))$ est également un drapeau et définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des drapeaux. On peut définir de même une action de A sur les couples de drapeau par $A \cdot (d, d') = (A \cdot d, A \cdot d')$.
Le nombre d'orbite de l'action sur les couples de drapeau est $n!$.

Étape 1 : Montrons que $\mathcal{D} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_S$

Montrons que cette action est transitive,
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et δ le drapeau formé des $(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k))_{k \in [\![0,n]\!]}$.
Pour $d = (F_0, \dots, F_n)$ un drapeau quelconque, on peut trouver une base $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], (f_1, \dots, f_k)$ est une base de F_k.
L'unique matrice A vérifiant $Ae_i = f_i$ est inversible et vérifie $A \cdot \delta = d$.

Comme l'action est transitive, $\mathcal{D}$ est en bijection avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/G_\delta$ avec G_δ le stabilisateur de δ. Or, on a pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ $A \cdot \delta = \delta \iff A$ est triangulaire supérieure, d'où $G_\delta = T_S$ et $\mathcal{D} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_S$.

Étape 2 : Identifions une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_S \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_S$

Pour $d \in \mathcal{D}$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, tel que $d = B \cdot \delta$, en identifiant d avec $\overline{B}$ de G/T_S, pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $A \cdot \overline{B} = \overline{AB}$ qui s'identifie à $AB \cdot \delta = A \cdot d$. On définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_S \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_S$ se traduit sur les couples de drapeaux par l'action $A \cdot (d, d') = (A \cdot d, A \cdot d')$.

Étape 3 : Dénombrons le nombre d'orbite en montrant que chaque orbite contient un unique élément de la forme $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$

Soit $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $(\overline{X}, \overline{Y}) = X(\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y})$.
Donc en considérant la décomposition de Bruhat de $X^{-1}Y$ on a $X^{-1}Y = T_1 P_\sigma T_2$ et comme $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_S$ on a :

$$(\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y}) = T_1(\overline{T_1^{-1}}, \overline{P_\sigma T_2}) = T_1(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$$

D'où $(\overline{X}, \overline{Y}) = XT_1(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$. Toute orbite contient donc un élément de la forme $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$ avec σ défini de manière unique car s'il existe $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) = A(\overline{I_n}, \overline{P_\tau}) = (\overline{A}, \overline{AP_\tau})$ donc $A \in \mathcal{T}_S$ et il existe $T \in \mathcal{T}_S$ tel que $AP_\tau = P_\sigma T$ d'où $\sigma = \tau$ par unicité de la décomposition de Bruhat.

Il y a donc autant d'orbite que d'éléments de S_n donc il y a $n!$ orbites.

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1*. Cassini, 2007.